

METHODE DE CALCUL APPROCHE DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE HORS D'EQUILIBRE VIBRATOIRE

DAVID ZEITOUN et RAYMOND BRUN

Laboratoire de Dynamique des Systèmes Réactifs, Université de Provence, Centre de Saint Jérôme, 13 Marseille (13e), France

(Reçu le 12 Mai 1972)

Résumé—Une méthode numérique de résolution des équations de la couche limite laminaire hors d'équilibre vibratoire est exposée. La recherche de solutions approchées de ces équations apparaît légitime dans la mesure où ces équations résultent déjà d'un certain nombre d'approximations, en particulier de celles consistant à négliger l'interaction de la relaxation et des processus de dissipation. La méthode adoptée revient à découpler les équations de conservation de l'équation de relaxation, à résoudre les premières par des méthodes habituelles et à chercher des solutions de cette dernière sous forme de développements en série.

Cette technique est appliquée au cas de la couche limite laminaire se développant le long des parois à l'aval d'une onde de choc mobile dans un tube—cas classique d'une couche limite hors d'équilibre avec un écoulement extérieur lui-même hors d'équilibre—et également au cas d'une couche limite en régime supersonique stationnaire se développant sur une plaque plane non catalytique.

NOTATIONS

C_p , chaleur spécifique à pression constante;
 C_v , chaleur spécifique de vibration;
 c , vitesse d'agitation thermique;
 C , $\rho\mu/\rho_e\mu_e$;
 D , coefficient de diffusion propre;
 e , énergie interne par molécule;
 f_v , fonction de distribution des molécules de nombre quantique $i = (i_v, i_r)$;
 f , u/u_e ;
 g , h/h_e ;
 h , enthalpie;
 k_f , coefficient de conductivité figé (translation-rotation);
 L , nombre de Lewis;
 m , masse d'une molécule;
 M_s , nombre de Mach de l'onde de choc;
 n , densité numérique moléculaire;
 p , pression;
 q , flux de chaleur;
 T , température de translation-rotation;
 T_v , température de vibration;

u , vitesse longitudinale (selon x);
 v , vitesse transversale (selon y);
 X , abscisse réduite $x/u_e\tau_e$ (enthalpie figée);
 ε , écart à l'équilibre de l'énergie de vibration $\bar{\sigma} - \sigma$;
 η , variable de similitude

$$\frac{\rho_e u_e}{\sqrt{(2\rho_e \mu_e u_e x)}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy;$$

μ , coefficient de viscosité;
 σ , énergie de vibration moyenne par unité de masse;
 $\bar{\sigma}$, énergie de vibration moyenne par unité de masse, correspondant à l'équilibre local;
 ρ , masse spécifique;
 τ , temps de relaxation.

L'indice

f , se rapporte aux paramètres figés;
 e , se rapporte aux paramètres en équilibre;

- e, se rapporte aux paramètres de l'écoulement extérieur;
- 0, se rapporte aux conditions initiales;
- w, se rapporte aux conditions à la paroi.

I. INTRODUCTION

DES MÉTHODES de résolution numérique des équations de la couche limite laminaire hors d'équilibre ont déjà été proposées depuis un certain temps [1, 2]. Elles concernent principalement des écoulements de gaz dissociés ou ionisés. Le cas de la couche limite laminaire hors d'équilibre vibratoire a été lui-même relativement peu traité [3, 4], en raison sans doute de la faible influence de l'état du gaz sur les paramètres globaux et directement mesurables tels que le frottement et le flux de chaleur pariétaux. Cependant, comme on l'a montré dans la référence [5], ces effets ne sont vraiment faibles que pour les gaz dont l'énergie de vibration est elle-même faible à la température de la paroi (considérée comme catalytique): c'est le cas d'écoulement de gaz diatomiques usuels (azote, oxygène) le long de parois métalliques froides.

De même, en ce qui concerne les profils de température, ceux-ci ne peuvent être très différents dans les cas extrêmes (figé ou en équilibre) que si la température (de translation par exemple) est elle-même très différente pour ces deux cas dans l'écoulement extérieur. C'est pourquoi un des exemples traités ci-après concerne le gaz carbonique dont le pourcentage d'énergie de vibration est déjà important aux faibles températures. Le cas d'une paroi non catalytique modifie également les profils de façon sensible.

Deux exemples sont ainsi traités, par la méthode de résolution numérique qui est tout d'abord exposée. Il s'agit d'une part, de la couche limite laminaire générée le long de la paroi catalytique d'un tube à choc, à l'aval de l'onde de choc incidente (cas N_2 , CO_2), l'écoulement extérieur étant lui-même hors d'équilibre et d'autre part de la couche limite sur une plaque plane non catalytique dans un écoulement supersonique d'azote en équilibre à l'extérieur

de la couche limite. Quant à la méthode de résolution des équations, elle est basée sur le découplage formel des trois équations de conservation de l'équation de relaxation, découplage qui peut s'opérer en raison de la valeur du nombre de Lewis figé L_f très voisine de 1 pour les exemples choisis.

II. EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE HORS D'EQUILIBRE VIBRATOIRE

On considère un écoulement extérieur soit en équilibre, c'est-à-dire que les molécules d'espèces i (correspondant à un nombre quantique de rotation i_r et un nombre quantique de vibration i_v) possèdent une fonction de distribution $f_i^{(0)}$ de Maxwell-Boltzman, soit hors d'équilibre vibratoire; dans ce dernier cas on suppose que les chocs résonants sont prépondérants et qu'on peut donc définir une température de vibration unique T_v :

La fonction de distribution $f_i^{(0)}$ s'écrit dans ces conditions:

$$f_i^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp - \frac{mc^2}{2kT} \times \frac{\exp(-e_{i_r}/kT) \exp(-e_{i_v}/kT_v)}{\sum_{i_r} \exp(-e_{i_r}/kT) \sum_{i_v} \exp(-e_{i_v}/kT_v)} \quad (1)$$

Les équations macroscopiques de conservation correspondantes sont les équations habituelles d'Euler dans le cas en équilibre auxquelles s'adjoint une équation de relaxation dans le cas hors d'équilibre que l'on prend sous la forme suivante:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{\tau} \quad (2)$$

Cette forme présuppose que les molécules se comportent comme des oscillateurs harmoniques.

Les équations de la couche limite sont déterminées à l'aide des hypothèses habituelles à partir des équations de Navier-Stokes dans lesquelles les coefficients de transport sont calculés à partir d'une fonction de distribution perturbée à l'ordre 1 $f_i = f_i^{(0)}(1 + \varphi_i)$.

On admet en outre les hypothèses suivantes: Les équations intégrales qui permettent de calculer ω_i et donc par suite les coefficients de transport ne font intervenir que les sections efficaces de collision des chocs élastiques. Cette hypothèse correspond à une approximation d'Eucken modifiée; d'autre part le déséquilibre de rotation apporté par la présence de la paroi est négligé par rapport au déséquilibre de vibration dans l'équation de relaxation de l'énergie vibratoire; si bien qu'on obtient le système d'équations (3) dans lequel apparaissent une température unique de translation-rotation et une température de vibration. Les équations tiennent compte évidemment d'un gradient de pression longitudinal nul (paroi plane) et correspondent à un écoulement bidimensionnel stationnaire.

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \frac{\partial}{\partial y} \rho v = 0$$

$$(b) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$(c) \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(k_f \frac{\partial T}{\partial y} + \rho DC_r \frac{\partial T_r}{\partial y} \right) \right]$$

$$(d) \quad u \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\bar{\sigma} - \sigma}{\tau} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho DC_r \frac{\partial T_r}{\partial y} \right)$$

$$p = \rho RT, \quad h = C_{p_f} T + \sigma,$$

$$d\sigma = C_v(T_r) dT_r, \quad d\bar{\sigma} = C_v(T) dT.$$

L'équation de relaxation en particulier ainsi obtenue est formellement cohérente avec celle de l'écoulement extérieur [6, 7]: en ce qui concerne le temps de relaxation τ , on prend, et pour l'écoulement extérieur et dans la couche limite, des valeurs déduites des expériences réalisées en tube à choc et synthétisées dans les références [8, 9]. Ainsi:

Pour N_2

$$\tau p = 0.987 \exp(230.26T^{-1} - 25.93) \mu s \text{ bar}$$

Pour CO_2

$$\tau p = 0.987 \exp(36.16T^{-1} - 3.34) \mu s \text{ bar}$$

A partir de ces hypothèses, il semble assez illusoire de chercher des solutions numériques exactes du système d'équations (3), aussi a-t-on utilisé la méthode de résolution approchée décrite ci-après.

III. METHODE DE RESOLUTION APPROCHEE DES EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE HORS D'EQUILIBRE VIBRATOIRE

L'introduction des nombres sans dimensions suivants:

$$\mathcal{P}_f = \frac{C_{p_f} \mu}{k_f} \quad (\text{Nombre de Prandtl figé}) \text{ et}$$

$$L_f = \frac{\rho DC_r}{k_f} \quad (\text{Nombre de Lewis figé})$$

permet d'écrire le terme de flux de chaleur de l'équation (3c) de la manière suivante

$$q_y = k_f \frac{\partial T}{\partial y} + \rho DC_r \frac{\partial T_r}{\partial y} = \frac{\mu}{\mathcal{P}_f} \left[\frac{\partial h}{\partial y} + (L_f - 1) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right] \quad (4)$$

Il apparaît ainsi que le choix de la valeur de L_f conditionne la méthode de résolution, puisque si $L_f = 1$ les trois premières équations du système (3) sont formellement découplées de la quatrième. Il est alors possible, moyennant certaines précautions, de résoudre de façon classique ces trois équations.

Le calcul de L_f tel qu'on peut le déduire de la méthode de Mason et Monchick (calcul de k_f) montre que pour l'azote entre 300 et 3000 K, $L_f \simeq 0.97$ à 1% près; pour le gaz carbonique, malgré l'imprécision plus grande des calculs, à 300 K, L_f reste sensiblement égal à 0.99. On admet donc l'hypothèse: $L_f = 1$. Cependant le découplage ainsi réalisé n'est que purement formel, la variable indépendante σ n'apparaissant plus dans (3a, 3b, 3c). Le découplage complet est alors réalisé à l'aide des hypothèses suivantes:

- L'écoulement extérieur est à vitesse constante
- L'écoulement extérieur est à enthalpie constante, (mais pas forcément à température constante).
- Le produit $\rho\mu$ ne dépend que de h (et non de T)

La première et la seconde hypothèse ne font que particulariser le problème, la troisième signifie que le produit $\rho\mu$ est indépendant de la relaxation, si bien qu'à une valeur de h on fait correspondre une valeur de $\rho\mu$ déterminée à une température T' fictive donnée par une loi $h = f(T')$ T' pouvant être soit une température figée, soit une température, d'équilibre. Cette hypothèse est rendue d'autant plus plausible qu'on connaît la faible incidence de la variation de $\rho\mu$ sur les profils des divers paramètres de la couche limite [2].

On admet la même hypothèse pour \mathcal{P}_f .

Ces trois hypothèses étant précisées, on applique au système (3a, 3c) la transformation de Lees-Dorodnytsin et on cherche les solutions de similitude classiques pour u et h , ce qui est ainsi rendu possible: on dispose donc du système bien connu suivant:

$$(Cf'')' + ff'' = 0$$

$$\left(\frac{C}{\mathcal{P}_f}g'\right)' + fg' = -\frac{u_e^2}{h_e^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\mathcal{P}_f}\right) Cff'' \right]'. \quad (5)$$

Les dérivations sont effectuées par rapport à la variable de similitude η .

Les conditions aux limites dépendent du problème particulier envisagé. En ce qui concerne l'équation de relaxation, on adopte le changement de variable $\varepsilon = \bar{\sigma} - \sigma$, ε représente donc l'écart local à l'équilibre de l'énergie de vibration, et on cherche pour ε des solutions sous la forme d'un développement en puissance de X , avec

$$\varepsilon(\eta, X) = \sum_n (-1)^n \varepsilon_n(\eta) X^n. \quad (6)$$

On obtient ainsi un système différentiel pour

$\varepsilon_n(\eta)$ qui s'écrit pour $n \geq 1$ et dans l'hypothèse où C_p est aussi une fonction de T'

$$C\varepsilon_n''(\eta) + [f \cdot \mathcal{P}_f + C'] \cdot \varepsilon_n'(\eta) - 2nf' \mathcal{P}_f \varepsilon_n(\eta) + 2 \frac{\tau_e}{\tau} \mathcal{P}_f \varepsilon_{n-1}(\eta) = 0. \quad (7)$$

L'équation pour $n = 0$ se réduit à $\sigma_{(x=0)} = \text{cte}$; cette constante dépend du problème particulier envisagé, de même que les conditions aux limites pour les équations (7).

Dans ces équations, τ est également supposé ne dépendre que de η ce qui ne conduit pas à des erreurs sérieuses, d'autant plus que les valeurs de τ ne sont pas connues avec une très grande précision.

Les profils de $f(\eta)$, de $g(\eta)$ et de leurs dérivées sont données par la résolution du système différentiel (5). Cette résolution s'effectue à l'aide de la méthode Runge-Kutta modifiée par Gill et couplée avec une méthode de tir permettant la détermination des valeurs $f''(0)$ et $g'(0)$ [11]. A partir de la connaissance de ces profils et à l'aide d'une méthode de différences finies on résout les équations (7); on en déduit les profils de $\varepsilon(\eta, x)$ (6) ainsi que les profils de $T(\eta, X)$, $T_v(\eta, X)$ grâce aux relations de définition (8)

$$d\varepsilon = d\bar{\sigma} - d\sigma \quad d\sigma = C_v(T_v) dT_v$$

$$dh = C_{p,f} T + \sigma \quad d\bar{\sigma} = C_v(T) dT. \quad (8)$$

IV. EXEMPLES DE COUCHE LIMITE HORS D'EQUILIBRE

IV. 1 Couche limite le long des parois d'un tube à choc à l'aval d'une onde de choc de vitesse constante

Dans un système d'axes lié à l'onde de choc, la couche limite est stationnaire et obéit aux équations (3); (x : abscisse mesurée à partir de l'onde de choc).

L'écoulement extérieur est hors d'équilibre vibratoire. L'application de la méthode exposée ci-dessus requiert: $u_e = \text{cte}$, $h_e = \text{cte}$; or il a été montré [12] que ces hypothèses conduisent à des résultats en accord raisonnable avec ceux obtenus par des méthodes plus exactes en ce qui concerne la valeur de T_e et de T_{ve} (et par suite de

ε_e): ces paramètres évoluent alors de façon exponentielle et en particulier on a

$$\varepsilon_e = \varepsilon_f \exp(-X). \quad (9)$$

Une difficulté subsiste quant au choix de la valeur de l'enthalpie: valeur d'équilibre ou valeur figée, ces valeurs conduisant à des différences sur T_e de l'ordre de 3 à 4%. Dans la suite, et par pure commodité on choisira la valeur figée.

Les conditions aux limites pour f et g s'écrivent

$$\eta = 0 \quad f'(0) = \frac{u_w}{u_e} \quad g(0) = \frac{h_w}{h_e} \quad f(0) = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f'(\infty) \rightarrow 1 \quad g(\infty) \rightarrow 1.$$

Celles affectant ε s'écrivent:

$$\eta = 0 \quad \varepsilon_n(0) = \quad (\text{paroi catalytique})$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \varepsilon_n(\infty) \rightarrow \frac{\varepsilon_f}{n!}$$

IV.1.1 *Profils des températures et de l'écart énergétique vibratoire local.* Les équations différentielles donnant ε_n sont résolues jusqu'à l'ordre 7, ce qui conduit, dans tous les cas, à une convergence suffisante des valeurs de ε pour les valeurs maxima de X choisies ($X = 2$).

Pour $X \rightarrow \infty$ les profils sont calculés directement à partir des équations (5) dans lesquelles tous les paramètres ont leur valeur d'équilibre car il est alors inutile de développer ε en série. Sur les figs. 1-6 où sont représentés les profils de T , T_v , ε pour l'azote ($M_s = 5$) et pour le gaz carbonique ($M_s = 2$ et 5), on remarque l'importance du déséquilibre dans le gaz carbonique se traduisant en particulier par une importante variation des profils de T en fonction de X .

Les profils de ε sont, eux, très caractéristiques et montrent bien le déséquilibre d'énergie vibratoire supplémentaire apporté par la présence de la paroi et auquel correspond le maximum observé sur les courbes lorsque $X \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que lorsque l'écoulement extérieur tend vers son état d'équilibre il subsiste dans la couche limite, à la même abscisse, une zone où le déséquilibre résiduel est plus important, en

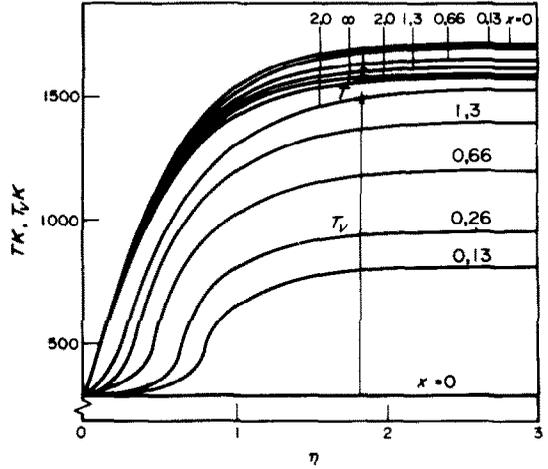


FIG. 1. Température de translation-rotation et température de vibration.

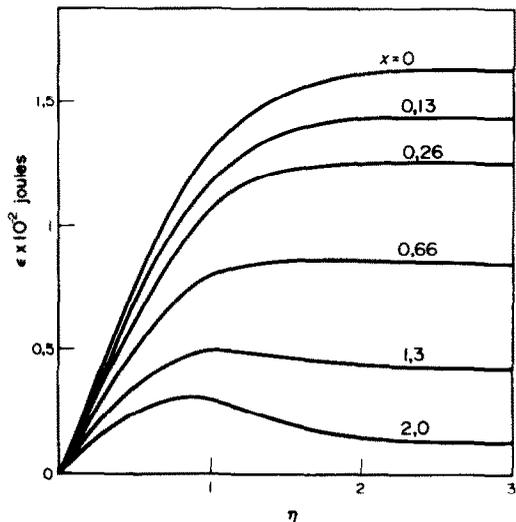
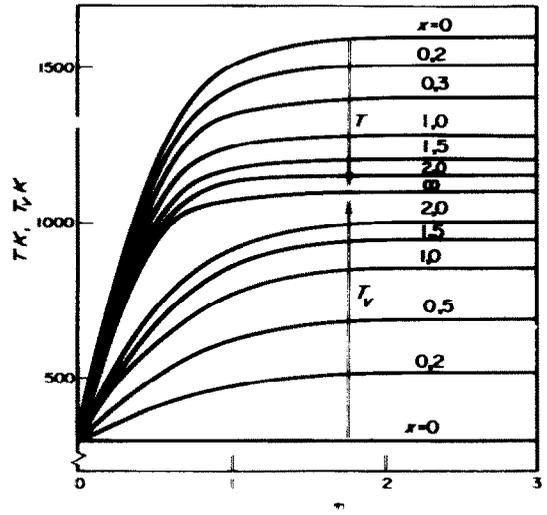
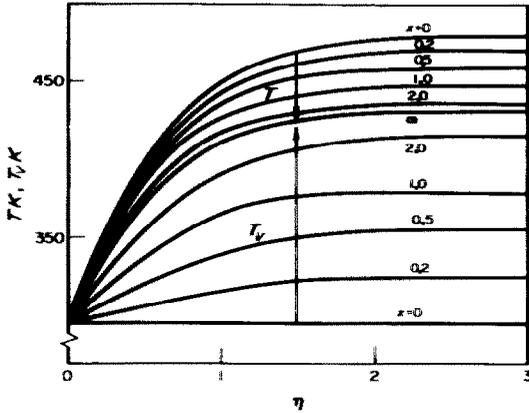


FIG. 2. Ecart à l'équilibre local de l'énergie de vibration.

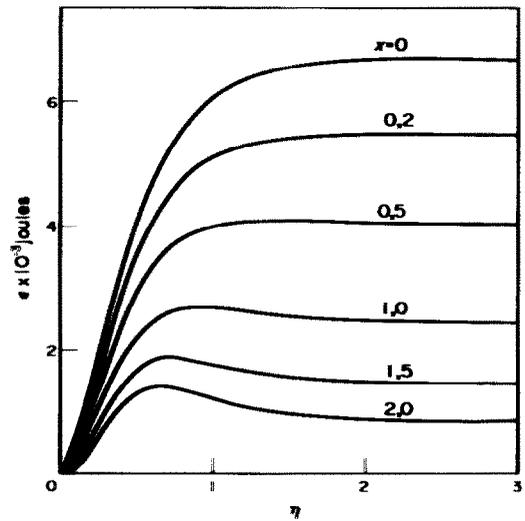
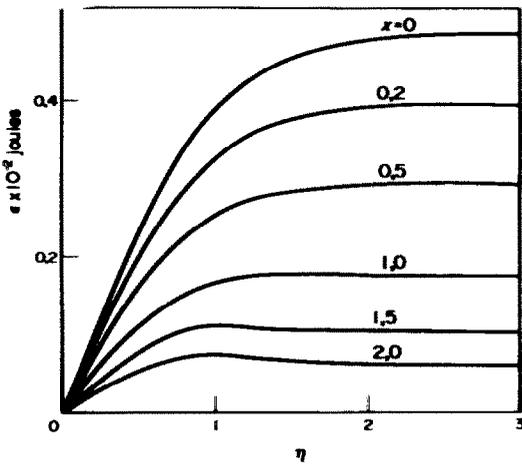
FIGS. 1 and 2. Profils des paramètres dans la couche limite à l'aval d'une onde de choc mobile. (Azote, $M_s = 5$, $p_0 = 0.01$ bar, $T_0 = 295$ K).

dépit de la présence d'une paroi catalytique ($x = 0, \varepsilon = 0$).

IV.1.2 *Flux de chaleur partiétal.* (Paroi catalytique, gaz carbonique). L'évolution du flux de



FIGS. 3 et 5. Température de translation-rotation et température de vibration. (Fig. 3: $M_\infty = 2$, Fig. 5: $M_\infty = 5$).



FIGS. 4 et 6. Ecart à l'équilibre local de l'énergie de vibration. (Fig. 4: $M_\infty = 2$, Fig. 6: $M_\infty = 5$).

FIGS. 3-6. Profils des paramètres dans la couche limite à l'aval d'une onde de choc mobile. (Gaz carbonique, $p_0 = 0.01$ bar, $T_0 = 295$ K).

chaleur pariétal $q_w = f(X)$ est déduite des profils de T et de T_v . Les résultats concernant la couche limite figée et la couche limite en équi-

libre sont représentés sur la Fig. 7 (solutions de similitude).

On a pris $k_{fw} = 13 \cdot 10^{-3}$ et

$$k_{e,q_w} = k_{f,w} \left[1 + L_f \frac{C_v}{C_{pf}} \right] = 16.7 \cdot 10^{-3} \text{ S.I.}$$

On remarque que le flux de chaleur dans le cas d'environ 15-20% ce qui montre l'influence

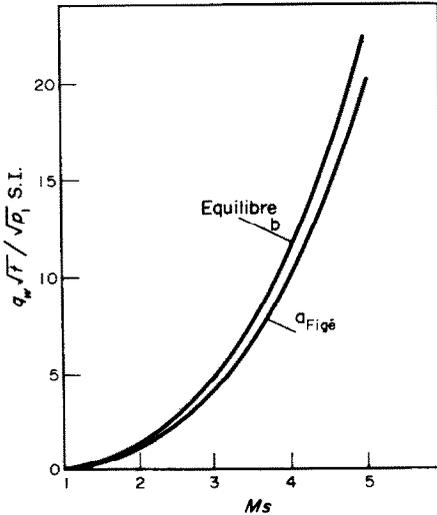


FIG. 7. Flux de chaleur pariétal à l'aval d'une onde de choc mobile dans le gaz carbonique. Cas figé (a) et cas en équilibre (b).

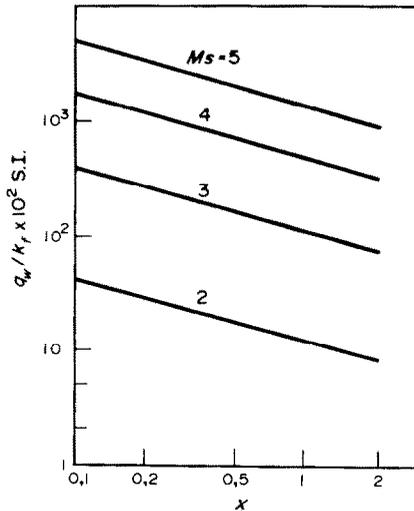


FIG. 8. Evolution du flux de chaleur pariétal à l'aval d'une onde de choc mobile dans le gaz carbonique.

prépondérante de la valeur de k dans l'expression du flux de chaleur pariétal, c'est-à-dire en fait que la valeur de q_w est plus influencée par la valeur T_w que par l'état de déséquilibre de la couche limite (profils de T et de T_v).

La Fig. 8 montre par ailleurs l'évolution de $q_w = f(X)$ pour différents nombres de Mach. On peut noter la quasi linéarité des courbes dans le domaine de variation étudié (coordonnées logarithmiques) c'est-à-dire que $q_w \sim A/X^n$.

IV.2 Couche limite stationnaire sur une plaque en régime supersonique (écoulement extérieur en équilibre, paroi non catalytique)

En vue de comparer les résultats obtenus par cette méthode numérique et ceux résultant d'une méthode ne faisant pas intervenir pour

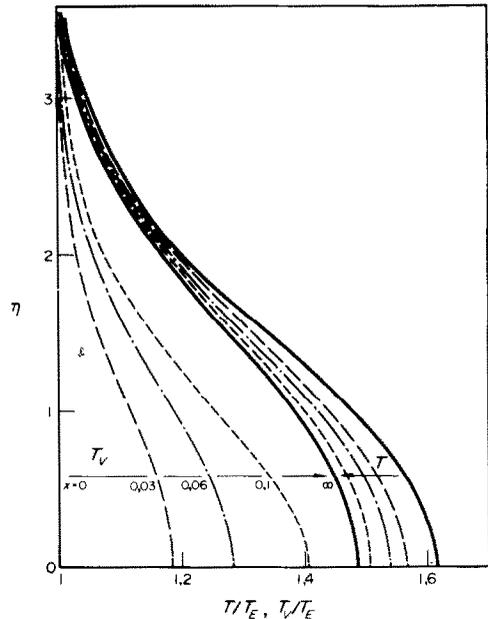


FIG. 9. Profils des températures dans une couche limite stationnaire le long d'une plaque plane ($M_e = 2, T_e = 3336 \text{ K}$).

l'enthalpie et la vitesse des solutions de similitude [3], on étudie la couche limite d'un écoulement supersonique d'Azote ($M_e = 2, T_e = 3336 \text{ K}$) le long d'une plaque plane non catalytique

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T_v}{\partial y} = 0.$$

On suppose en outre que la dissociation reste figée. On a dans ce cas, comme conditions aux limites

$$\eta = 0 \quad f(0) = 0 \quad f'(0) = 0$$

$$g'(0) = 0 \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right)_0 = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad f'(\infty) \rightarrow 1 \quad g(\infty) \rightarrow 1 \quad \varepsilon_{ne} = 0.$$

La Fig. 9 représente l'évolution de T et de T_v le long de la plaque et l'accord avec les résultats de la référence [3] est raisonnable compte tenu du fait que le profil initial de température de translation-rotation ($X = 0$) est légèrement différent dans les deux cas et peut entraîner le décalage remarqué entre les profils suivants: cet écart évidemment indépendant des méthodes utilisées provient probablement des valeurs numériques différentes choisies pour certains paramètres (μ , k_f , \mathcal{P}_f ...).

V. CONCLUSION

Il a été exposé une méthode de résolution approchée des équations de la couche limite laminaire hors d'équilibre vibratoire, ces équations résultant elles-même d'un certain nombre d'approximations; la recherche de solutions approchées apparaît légitime, d'autant plus que les hypothèses émises sont assez peu restrictives ($L_f \simeq 1$, $\rho\mu$, \mathcal{P}_f , τ , C_p indépendants de la relaxation).

Avant d'entreprendre la recherche de solu-

tions numériques 'exactes', il semble préférable de disposer d'équations reflétant le mieux possible les phénomènes, et dans le cas particulier de la couche limite de connaître entre autres, l'influence réciproque de la relaxation sur les phénomènes de transport.

BIBLIOGRAPHIE

1. F. G. BLOTTNER, Chemical non equilibrium boundary layer, *AIAA J* 2 (2), 232 (1964).
2. W. H. DORRANCE, *Viscous Hypersonic Flow*, McGraw-Hill, New York (1962).
3. V. M. KOUSNETSOV et S. N. SIELIVERSTOV, Ecoulement le long d'une plaque d'un gaz visqueux hors d'état d'équilibre (1967).
4. L. A. LADNOVA, Couche limite laminaire hors d'équilibre sur une plaque plane, *Messenger de l'Université de Leningrad* 19, p. 114 (1964).
5. R. BRUN, J. P. GUIBERGIA et R. MARMEY, Couche limite laminaire et relaxation de vibration à l'aval d'une onde de choc mobile, Congrès International de Mécanique appliquée, Stanford, Calif (1968).
6. M. N. KOGAN, *Rarefied Gas Dynamics* p. 217. Plenum Press, New York (1969).
7. C. S. WANG CHANG et G. E. UHLENBECK, University of Michigan Engineering Research Rep' n° CM. 681 (1951).
8. R. C. MILLIKAN et D. R. WHITE, Systematics of vibrational relaxation, *J. Chem. Phys.* 39, 3209 (1963).
9. C. J. S. M. SIMPSON, K. B. BRIDGMAN et T. R. D. CHANDLER, A shock tube study of vibrational relaxation in carbon dioxide, 6. International shock tube symposium, Freiburg (1967).
10. E. A. MASON et L. MONCHICK, Heat conductivity of polyatomic and polar gases, *J. Chem. Phys.* 36, 1622 (1962).
11. B. ROUX, Thèse de Doctorat ès Sciences, Marseille (1971).
12. P. A. BLYTHE, Comparison of exact and approximate methods for analysing vibrational relaxation regions, *J. Fluid Mech.* 10, 33 (1961).
13. D. ZEITOUN et R. BRUN, Caractéristiques d'une couche limite laminaire hors d'équilibre vibratoire, *C.R. Acad. Sci.* 273, 778 (1971).

METHOD OF APPROXIMATE CALCULATION OF THE LAMINAR BOUNDARY LAYER WITH VIBRATIONAL NON-EQUILIBRIUM

Abstract—A numerical method for solving the equations for a laminar boundary layer with vibrational non-equilibrium is presented. Approximate solutions are obtained by decoupling the relaxation from the dissipative processes. The method amounts to resolving separately the conservation equations and the relaxation equation; the former are solved by usual techniques and the solutions of the latter are expressed in a form of a power series.

This method is applied to the case of the laminar boundary layer developing along the walls of a shock-tube behind the incident shock—a classical case of a boundary layer and an inviscid flow both in non equilibrium—the method is also applied to the case of the stationary supersonic boundary layer along a non catalytic flat plate.

METHODE ZUR NÄHERUNGSWEISEN BERECHNUNG DER LAMINAREN
GRENZSCHICHT BEI SCHWINGUNGS-NICHTGLEICHGEWICHT

Zusammenfassung—Zur Lösung der Gleichungen für eine laminare Grenzschicht mit Schwingungs-Nichtgleichgewicht wird eine numerische Methode vorgestellt. Es werden Näherungsgleichungen erhalten, indem die Relaxation vom dissipativen Prozess entkoppelt wird. Die Methode führt auf die getrennte Auflösung der Erhaltungsgleichungen und der Relaxationsgleichung; die erstgenannten werden durch übliche Methoden gelöst, die Lösungen der letztgenannten werden durch Potenzansätze ausgedrückt.

Diese Methode wird auf den Fall der Laminaren Grenzschicht angewandt, die sich entlang den Wänden eines Stosswellenrohres hinter dem Ausgangsstoss ausbildet, also den klassischen Fall einer Grenzschicht und einer reibungsfreien Strömung, die beide im Nichtgleichgewicht sind. Die Methode wird ebenfalls auf den Fall der stationären Überschallgrenzschicht entlang einer nicht-katalytischen ebenen Platte angewandt.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РАСЧЕТА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО
СЛОЯ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ НЕРАВНОВЕСИИ

Аннотация—Описывается численный метод решения уравнений ламинарного пограничного слоя при вибрационном неравновесии. Получены приближенные решения путем рассмотрения релаксации отдельно от процессов диссипации. Метод заключается в том, что уравнения сохранения и уравнения релаксации решаются отдельно: первые—с использованием обычных методов, вторые—в виде степенных рядов.

Метод применяется для решения уравнений ламинарного пограничного слоя, развивающегося вдоль стенок ударной трубы за набегающей ударной волной—классического случая пограничного слоя и невязкого течения при отсутствии равновесия, а также для стационарного сверхзвукового пограничного слоя вдоль некаталитической плоской пластины.